

Formfühlen in Reihen und Lücken

Wahrheiten aus der Welt der Geometrie – Forschungsbericht

Die Hände haben ihr eigenes subtiles Erinnerungsvermögen. Und nur die berührende Auseinandersetzung mit dem Modell legt dessen flexible Eigenschaften an den Tag. Wer einmal erlebt hat, auf wie viele verschiedene Arten der Würfel sich zum Viereck oder zum Sechseck zusammenfalten lässt, der wird darüber staunen, welches Vertrauen wir täglich in Kuboklotzstapel setzen.

Die innere Struktur des Ikosaeder in den Raum hinaus abbilden

Der Kuboktaeder ist ein Würfel mit abgeschnittenen Ecken, und auch ein Oktaeder mit abgeschnittenen Ecken. Als bewegliches Modell ausgeführt, heißt er »Heureka-Oktaeder«, denn wenn man die Quadrate – gewusst wie – zusammenfaltet, schrumpft der Körper, bis nur ein Oktaeder übrig bleibt. Mitten auf dem Weg dieser Schrumpfung passiert der Kuboktaeder ein Stadium, in dem er mit dem Ikosaeder identisch ist. Es

ist der einzige Körper, bei dem die Strecken vom Mittelpunkt zu einer Ecke ebenso lang sind wie alle Kanten. Beim Ikosaeder ist das nicht gegeben, und daher kann der Ikosaeder nicht als dichte Packung von Tetraedern beschrieben werden. Während Fullers Lieblings¹ einen Ausschnitt aus der Oktaeder-plus-Tetraeder-Stapelung zeigt, die tatsächlich raumfüllend ist, lässt sich der Raum durch Tetraeder allein nicht lückenlos füllen.

Führen wir einen Beinahe-Tetraeder ein, mit drei kürzeren gegenüber drei längeren Kanten, so lässt sich aus 20 solcher Beinahe-Tetraeder zwar ein Ikosaeder lückenlos zusammenfügen, aber das war es; mit solch einfacher Zerrung lässt sich die raumfüllende Packung nicht weiter ausdehnen. Während der Fehler im Kern des Ikosaeder ausgeglichen ist, wird er außen herum umso größer ausfallen. Um die innere Struktur des Ikosaeder in den Raum hinaus abzubilden, wird eine ausgewogenere Verteilung des Fehlers benötigt, der sich nicht im Kern des Ikosaeders konzentrieren, sondern auf seiner Oberfläche gleichmäßig verteilen sollte.

Diese gleichmäßige Verteilung ist im halb zusammengefalteten Kuboktaeder schon sichtbar. Darin sind die Quadrate zu Rauten geworden, und jede Raute repräsentiert zwei Dreiecke des Ikosaeder. Anstatt

über jedes Dreieck Tetraeder nach außen zu stülpen, wie beim Stachel-Ikosaeder, stülpen wir nur über diese Rauten, und die übrigen Tetraeder werden zwischen die einzelnen Stachel gesteckt. Dort passen sie wieder beinahe, und wenn die Spalten geschlossen werden, verteilt sich der Fehler gleichmäßig auf der Oberfläche, in sechs Richtungen weisend. Den entstandenen, mathematisch nicht ganz korrekten Polyeder aus 66 gleichen Dreiecken nenne ich »Die Elf«. Sie kann auch als ein Übergang zwischen Würfel außen und Ikosaeder innen betrachtet werden. Ihr liegt die gleiche Sechsstrahligkeit zu Grunde, die in jeder Schneeflocke steckt. Die unglaubliche Vielfalt in der Ausformung von Schneeflocken kann mit ihrer Hilfe formfühlend begriffen werden. Denn das Spalt-Netz hängt beweglich zusammen. Wann immer sich Tetraeder zu größeren Gruppen zusammenrotten, werden sich ausgleichende Cluster auf der gesamten Oberfläche ausformen, so dass ein zentriertes, sechsstrahlig ausgerichtetes globales Muster entsteht.

Die Cluster, die in der Elf schon sichtbar sind als Ausbuchtungen der Ikosaeder, können wir einzeln herauslösen. Dies ist der Moment der Ikosaeder-Explosion. Den neuen Hohlkörper, Nucleus der Ikosaeder-Explosion, nenne ich Korpuskel. Korpuskel ist ein Körperchen, ein Klein-Teil, kein Kleinst-Teil.

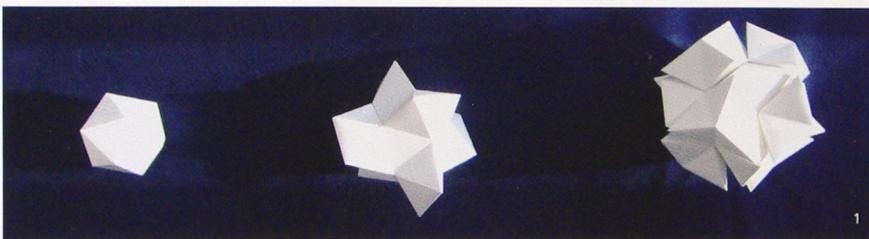


Bild 1
Ikosaeder-Explosion,
Papiermodelle. Von links
nach rechts: Ikosaeder,
»die Elf«, Tetraeder-
Cluster, gemäß der »Elf«
strukturiert.



Bild 2
Kuboktaeder,
Twistix-Modelle. Links
in offener, mittig in
zum Oktaeder gefalteter
Position, rechts ergänzt
zur dichten Packung aus
Tetraedern und Oktae-
dern. Twistix erfand Rico
Tschardtke.

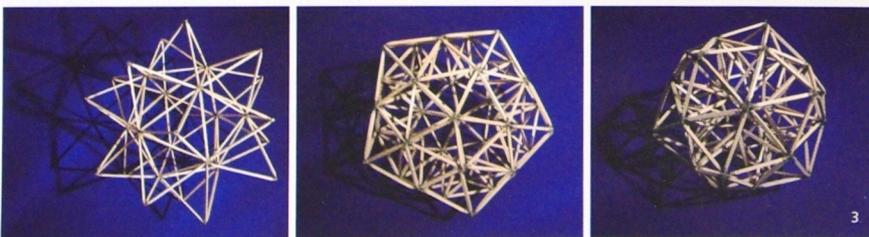


Bild 3
Stachel-Ikosaeder.
Links: der Ikosaeder mit
Tetraedern auf jeder
Fläche; mittig: Der Iko-
saeder mit eingestülpten
Ecken – eine Oberfläche
aus Korpuskeln und
Dreiecken; rechts: Eine
Oberfläche nur aus Kor-
puskeln – die Fünfecke
bilden den Dodekaeder.

Bilder 4a – c
5 Tetraeder.
4a: 5 ineinander verschränkte Tetraeder sind ein vollkommen regelmäßiges Gebilde, bei dem die Eckpunkte mit

denen des Dodekaeders übereinstimmen.
4b: 5 Tetraeder, um eine gemeinsame Kante gruppiert, lassen einen Spalt.
4c: Goldberg-Ikosaeder, Twistix-Modell.

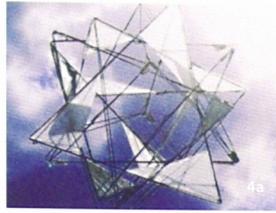
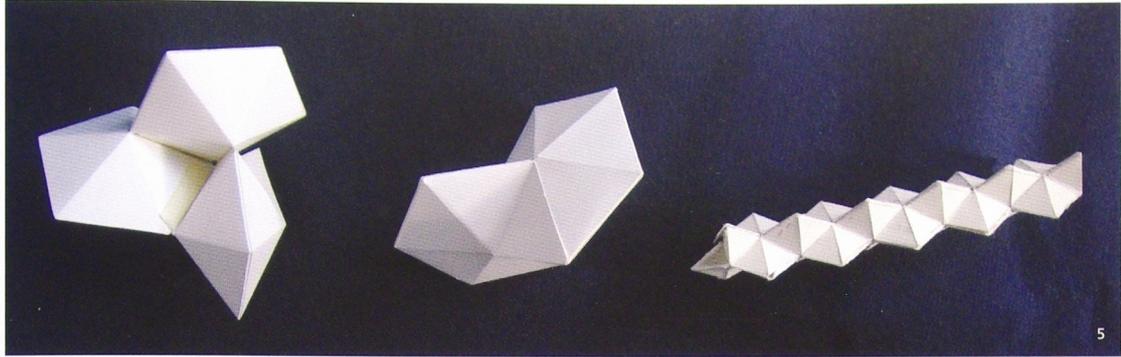
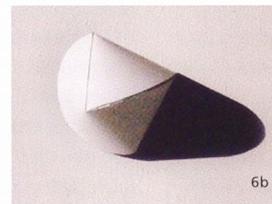
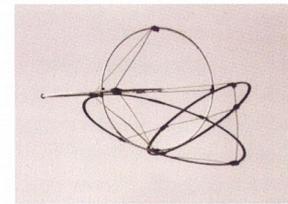
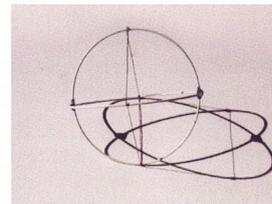
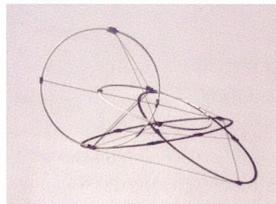
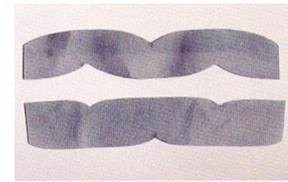
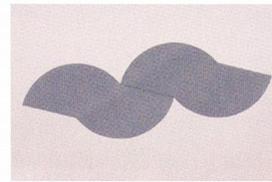
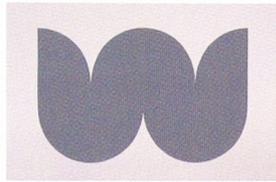


Bild 5
Ikosaeder-Explosion 2.
Links: Drei Korpuskel in der Anordnung zueinander, wie sie in der Elf stecken.
Mittig: Zwei ineinander verschränkte Korpuskel = Der Goldberg-Ikosaeder.
Rechts: 10 ineinander verschränkte Korpuskel = eine geradeaus laufende Korpuskelkette.



Bilder 6a – c
6a: Das Oloid und seine lineare Konstruktion, bestehend aus zwei senkrecht zueinander stehenden Kreisen, wobei der Rand des einen je den Mittelpunkt des anderen durchstößt; 6b: das Sphericon und seine lineare Konstruktion, bestehend aus zwei senkrecht zueinander stehenden Kreisen, deren Ränder sich in zwei Punkten berühren; 6c: der Vier-Richtungs-Torkler und seine Konstruktion, entstehend als Umhül-

lung der im Inneren des Oloid verborgenen Halbkreise. Darüber zu sehen: Abwicklung des Oloid; Abwicklung des Sphericon, Abwicklung des Vier-Richtungs-Torklers, der als Einflächner im Inneren des Oloid entwickelt wurde, und Abwicklung des leicht modifizierten Vier-Richtungs-Torklers, der in der gleichen Verwandtschaft zum Tetraeder steht wie das Sphericon zum Oktaeder.



Dyaden

Welch ein brauchbarer Grundbaustein ein Korpuskel ist, habe ich erst später herausgefunden. Damals hatte ich eine Menge gefalteter verklebter Papierdreiecke in der Hand, die sich wie Klappmäuler verhielten, und mir kam die Idee, diese so zu kombinieren, dass sie sich quasi gegenseitig ins Maul beißen. Daraus ist eine Reihe von Körpern entstanden, die ich, gemäß ihres Ursprungs, zwei Kerne in einem zu sein, »Dyaden« nenne. Dyaden sind Nebenprodukte der Ikosaederexplosion; sie stehen nicht direkt innerhalb der eben beschriebenen Reihe, sondern sie bilden eine eigene Reihe.

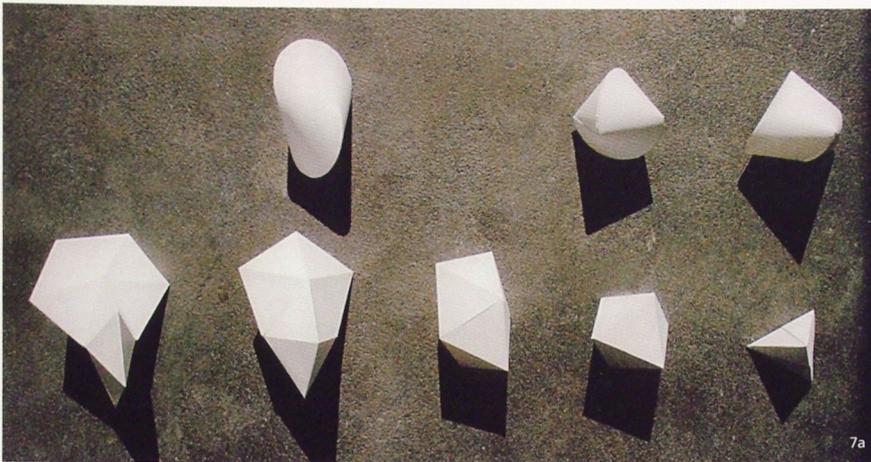
Innerhalb der Geometrie haben wir es immer wieder mit Reihen zu tun, die in sich

abgeschlossen sind. Die Reihenentwicklung hat Anfang und Ende, gleichmäßig und überraschend; davor und danach kommt nichts, was in der Kontinuität dieser Reihe Zusammenhang hätte. Reihen eignen sich besonders zum Formfühlen, denn der Geist hangelt sich voran, von einer Form zur anderen, von einer vertrauten Form über Ungewissheit zur Nächstbekanntesten.

Es gibt Dyaden mit 4, 8, 12, 16 und 20 gleichseitigen Dreiecken. Die erste Dyade entstand aus zwei aufeinander gesetzten Ausdehnungen der Elf. Sie besteht, flächig betrachtet, aus 3 x 4 regelmäßigen Dreiecken, und volumenmäßig aus 3 potentiellen Tetraedern. Potentiell meint hier, dass eine isolierte Ausdehnung auf- und zuklappen

kann. In der 3 x 4-Dyade stehen einige Dreiecke in der gleichen Ebene. Diese sind im Twistixmodell in der Abbildung als Rauten zusammengefasst.

Wird jedes Klappmaul um ein potentielles Tetraeder reduziert, so bringt deren Zusammenkommen den Oktaeder hervor, der 2 x 4 Flächen hat. Die kleinste Dyade ist der schwarz-weiß parkettierte Tetraeder. Hier sind die beiden potentiellen Tetraeder zu einem einzigen, stabilen Tetraeder zusammengewachsen. Werden die Klappmäuler auf entsprechende Weise verbreitert, so entsteht zunächst die 4 x 4-Dyade, und in der nächsten Stufe die 5 x 4-Dyade, ein Körper mit erstaunlichen Eigenschaften – der »Goldberg-Ikosaeder«. Die 6 x 5-Dyade ist



Bilder 7a, b
Dyaden und ihre
Einflächner. Von links
nach rechts: 7b: Twistix-
modelle: 5 x 4-Dyade =
Goldberg-Ikosaeder;
4 x 4-Dyade; 3 x 4-
Dyade; 2 x 4-Dyade =
Oktaeder;

1 x 4-Dyade = Tetraeder.
7a: Papiermodelle:
die untere Reihe zeigt
die gleichen Körper;
in der Reihe darüber
die entsprechenden
Einflächner: das Oloid;
das Sphericon; der Vier-
Richtungs-Torkler.

Wirbel bilden einen regelmäßigen Wechsel, einen Rhythmus, der den Links- und Rechtskurven des Oloid ähnelt.

Die Betrachtung des Goldberg-Ikosaeder ermöglicht es, die Wasserwirbel, wie sie sich in der Oloidform bilden, zu visualisieren. Hierzu teilen wir die Dreiecke der Goldberg-Ikosaeder-Oberfläche in zwei Sorten, zum Beispiel schwarze und weiße, eigentlich zu denken als linksdrehende und rechtsdrehende. Eine gleichmäßige Aufteilung gestaltet sich schwierig. Anfangs geht es eine Weile gut, trifft aber unweigerlich auf einen Bruch, der sich nicht beheben, jedoch divers verschieben lässt, und dabei ist nicht zu sagen, welcher Art von Unregelmäßigkeit der Vorrang gegeben werden kann (Bild 8). Die Parkettierung des Goldberg-Ikosaeder zu formfühlen schickt den Geist im Kreis, und bricht alte Strukturen auf. Auf die gleiche Weise bringt sich das Wirbelmuster im Oloid selbst aus dem Takt. Immer wieder sprengt sich das Muster, das sich gerade gefunden und gefestigt hat, selber auf, und ein großer Wirbel wird zerstäubt in tausend Miniwirbel, einen Wirbelschaum.

Es wäre sicherlich lohnend, die Bewegungsmuster beider Körper zu kombinieren. Wie wird Wasser auf das vieldimensionale Rühren des Oloid reagieren, wenn es gleichzeitig gemäß des Goldberg-Ikosaeder wie von einer Herzkammer gepumpt wird?

Manchmalkörper zwischen Fünfeck und Sechseck

In einem impulsübertragenden Bewegungsmuster überführt der Goldberg-Ikosaeder das Sechseck in ein Fünfeck, während er gleich-



kein Hohlkörper mehr, sondern eine Gebilde aus zwei ineinander geschobenen Sechsecken. So bildet das Tetraeder auf der einen und der Goldberg-Ikosaeder auf der anderen Seite die beiden Endpunkte einer geometrischen Reihe.

zwischen den Gesetzen der Natur und der Arbeitsweise des menschlichen Geistes.

Die überaus interessanten Anwendungen sind in »Rhythmusforschung und Technik« beschrieben. Die Nutzung des natürlichen Bewegungsrhythmus des Oloid führt zu einer ungewöhnlich Effizienz. Oloide »paddeln« heute auf Wasserflächen in Klärgruben, und pharmazeutische Produkte werden gemäß der Oloidbewegung zugleich schonend und gründlich vermischt. Die vitalisierenden Effekte dieser Anwendungen werden verständlich, wenn man sich vor Augen führt, wie sehr die Bewegung des Oloid derjenigen Bewegung ähnelt, in die sich fließendes Wasser spontan begibt. Wenn in die Oberfläche eines gerade fließenden Gewässers ein Stöckchen getaucht wird, bilden sich dahinter Verwirbelungen: Rechtsdrehende und linksdrehende

Wirbel in Oloid und Goldberg-Ikosaeder

Als eckige Entsprechung der Oloidform ist der Goldberg-Ikosaeder ein Bruder des Oloid. Während er sich von innen her an die Form des Oloid annähert, tut die 4 x 4-Dyade dies von außen heran.

Die Einflächner der Dyaden werden auch gerne Torkelkörper genannt, denn wenn sie eine schiefe Ebene hinabrollen, vollführen sie einen merkwürdig taumelnden Bewegungsablauf. Das Laufmuster des Goldberg-Ikosaeder ist mit dem Abrollvorgang des Oloid nahezu identisch.

Paul Schatz verstand es, das spezifische Bewegungsmuster des Oloid zu maschinenbaulicher Anwendung zu bringen. Technik in seinem Verständnis unterstützt die Natur und schöpft aus der tiefen Verwandtschaft

Bilder 8a, b
8a: Verwirbelungen
hinter einem in gerade
fließendes Wasser

gehaltenen Stab²; links
8b: Laufmuster des
Goldberg-Ikosaeder.
Foto: Caren Müller.



8a

zeitig ein Fünfeck ins Sechseck überführt. Er besteht aus zwei geöffneten, ineinander verschränkten Korpuskeln. Man kann den einen Korpuskel platt drücken; im gleichen Moment bläht sich der andere auf. Durch diese Beweglichkeit werden Korpuskel zu Manchmalkörpern, die mal als körperhaftes Volumen, mal als volumenlose Fläche existieren. Das ist sowohl theoretisch als auch praktisch faszinierend. Aber ist es theoretisch überhaupt möglich?

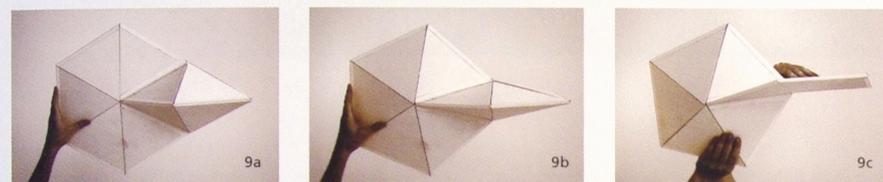
Gewusst, dass Tetraeder sich nicht lückenlos stapeln lassen, ist es leicht zu beweisen, dass es den komplett platten Goldberg-Ikosaeder nicht gibt. Wenn ich im Gespräch mit Mathematikern vor meinen Modellen und Objekten stehe, ist das ungeheuerlich, zu hören: »Das gibt es nicht«. Wir

Modell erlebt werden, das durch ein kleines Loch gehörig pfeift, denn auf dem Weg durch die Materialdehnung verändert der Goldberg-Ikosaeder sein Volumen.

Also sind Korpuskel und der Goldberg-Ikosaeder Manchmal-Körper auf einer zweiten Ebene. Mal existieren sie in mathematisch korrekter Weise, mal nur real, aufgrund der Toleranz des Materials, aus dem sie gefertigt wurden.

Korpuskelgeometrie und Twistix

Eine Statik ohne Spannungsmomente, also ein mathematisch einwandfreier Zustand, beweist in der Praxis keine Langlebigkeit. Vielmehr sind gerade die Knotenpunkte / Verbindungsteile eines »mathematisch kor-



stehen davor, wir können daran stoßen und rücken. Die Mathematiker selbst überrascht die Tatsache, dass es den Goldberg-Ikosaeder eben doch gibt, nicht als Wackelvielfach, aber durchaus mathematisch »wohlexistent«, und das in genau drei Positionen.

Wohlexistent ist die ausgeglichene Position, in der beide Korpuskel gleich dick sind. Die zwei weiteren Positionen liegen »kurz vor platt«, und im komplett geplätteten Zustand befindet sich der Goldberg-Ikosaeder im Moment der größten Abweichung. Da beide Punkte so nah beieinander liegen, geht ein aus Papier gebauter Goldberg-Ikosaeder der starken Spannung kurz vor platt mit einem leisen »plopp« und Schieflegen aus dem Weg. Die Zerrung zwischen den drei Wohlexistenzen ist viel geringer als die Spannung kurz vor platt und kann an einem fast luftdichten

rekten«, abweichungs- und spannungsfreien Systems großem Verschleiß ausgesetzt, da sie harten Erschütterungen unterliegen, die wegen fehlender Grundspannung nicht auf benachbarte Punkte übertragen und verteilt werden. Korpuskelgeometrische Einheiten sind durch eine innere Spannung sprungkräftig. Wenn man einen Korpuskelball anrempelt, tritt er beiseite. Korpuskelketten sind, obwohl, oder vielleicht gerade weil sie mathematisch nicht ganz einwandfrei sind, prima herstellbar. Papier und Pappe eignen sich wunderbar.

Einfacher in der Herstellung und robuster im Gebrauch sind Korpuskel aus Twistix. Zur Erforschung der in einer räumlichen Struktur angelegten Beweglichkeit öffnen Twistix neue Möglichkeiten des Formfühlers und Formfindens. Die Hände haben ihr eigenes subtiles Erinnerungsvermögen. Twistix und Korpuskel-

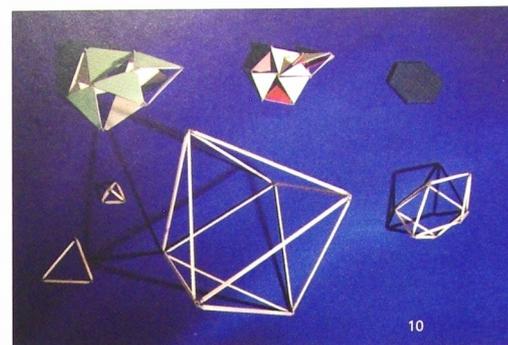


Bild 10
Aus Twistix die 3 x 4-Dyade, ein großer Oktaeder (2 x 4-Dyade), ein Tetraeder (1 x 4-Dyade) und ein Dreieck – das untere Ende der

Reihe – die 0 x 4-Dyade. Darüber aus Treplates: die 4 x 4-Dyade, der Goldberg-Ikosaeder (5 x 4-Dyade) und das obere Ende der Reihe – ein Sechseck.

Bilder 9a – c
Goldberg-Ikosaeder. Kurzlebiges Modell aus Holz und Klebeband: Der Goldberg-Ikosaeder in drei Positionen: mittig

die ausgeglichene, eine wohlexistente; links und rechts die mathematisch unmöglichen, komplett geplätteten Positionen. Foto: Anja Müller.

geometrie bringen Kopf und Hände zusammen, bringen die beiden Hirnhälften zusammen, öffnen einen intuitiven Umgang mit Logik. Sie fördern das dreidimensionale Vorstellungsvermögen jenseits von Kuboklotzstapeln. Twistix und Korpuskelgeometrie beweisen, dass mathematisches Denken nicht unbedingt mit Zahlen und Berechenbarkeit einhergeht.

Korpuskelgeometrie – vom Torkelkörper zur Drei-Phasen-Pumpe

Bei der Verketzung von Goldberg-Ikosaedern suche ich stets nach geschlossenen Systemen, zunächst Ringkörpern, dann Netzwerken, und untersuche ihre Beweglichkeit.

Während der Goldberg-Ikosaeder im gewohnten Zweier-Rhythmus pumpt wie ein Herz, Auf-zu, Hin-her, wird man von der längeren Korpuskelkette überrascht: Wenn man die Korpuskelkette »pumpt«, überträgt sie den Impuls, indem der jeweils dritt-nächste Korpuskel in die gleiche Phase geht. Auf dieser Drei-Phasigkeit basiert die Beweglichkeit des Zwölferrings – und die Unbeweglichkeit des Sechzehnerings und des Korpuskelballes.

Lücken in der Wohlexistenz

Korpuskel sind beide Körper, der reale und der korrekte. Korpuskel wechseln zwischen beiden Existenzformen. Indem sie sanft



Bild 15
Kunsthochschule Weisensee, Berlin, »Tag der offenen Türe« (2007).
Ausstellung von Modellen im Eingangsfoyer. Zu sehen ein Oktaeder-Zwölferring aus Treplates.



16



17

Bild 16, 17
Komplexe Korpuskelnetze gibt es mit und ohne »Dreh«. Kreisel aus Twistix. Der Korpuskelball ist das kleinste Korpuskelnetz. Foto: Caren Müller.

ung, entstanden durch eine Fortführung der Logik in den Raum des Unmöglichen hinein.

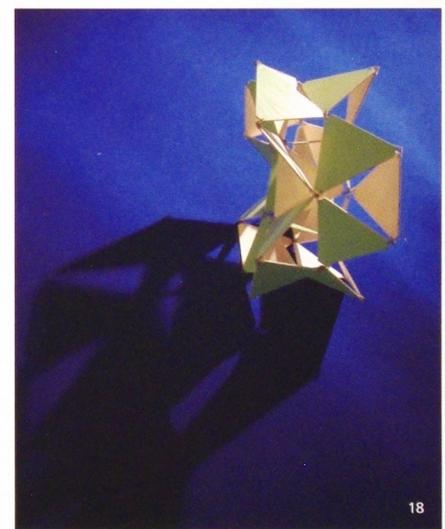
Korpuskelgeometrie überwindet die kleinen Sperrigkeiten der natürlichen geometrischen Gesetze. Ähnliche Intervall-Stapelungs-Verschiebungen werden erfolgreich gleichmäßig verteilt seit 1722 Johann Sebastian Bach mit dem »wohltemperierten Klavier« eine harmonieübergreifende Notenskala einführte.

Die Reinheit der ganzen Zahlen ist in der Musik im einzelnen Ton wohl gegeben. Daneben gibt es eine Vielzahl mathematisch korrekter Ton-Intervalle, die wir in einem »wohltemperierten« System leicht verzerren und verschieben. Womit wir leben und arbeiten, ist eine gleichmäßig verteilte, gemittelt minimierte Abweichung. Und genau so, wie mit konsequent abweichlerischen akustischen Intervallen gute Musik gemacht werden kann, können aus einem 60° Raser nach Bauanleitung Korpuskelketten gefaltet werden⁵.

Eva Wohlleben (geb. 1977); Studium des Kunsthandwerks, Grennan Mill School, Irland. Studium der Bildhauerei an der Kunsthochschule Weißensee, Berlin. Seit 2006 Meisterschülerin an der Kunsthochschule Weißensee bei Inge Mahn.

Bild 18
Korpuskel-Achtering aus Treplates. Der Achtering ist der kleinste Korpuskelring. Treplates sind Dreiecksflächen mit Spiralfedern an den Ecken. Beim Bau mit Treplates »pur« muss luftig konstruiert werden, da die Platten durch die freien Flächen hindurchgedreht werden. So kommt man praktisch zurück zur Frage der Parkettierung. Ringe glatt parkettierbar, Netze dagegen nicht.

Bild 19
Blick in die Ausstellung »Griffige Geometrie« der Galerie Bob Parsley, Berlin (vom 5. bis 28. Mai 2007) mit Modellen. Zu sehen ein großer, von Stefan Rak pneumatisch betriebener Goldberg-Ikosaeder. In ihm sind Twistix und Treplates kombiniert – daher kompakt flächig, im Gegensatz zu dem nur aus Treplates gebauten Achtering etwa. Darunter diverse Korpuskelketten auf sechseckigen Säulen. Foto: Formzo.



18

Anmerkungen:

- 1 Als »Fuller's Liebling« bezeichne ich den Oktaederstumpf.
- 2 Theodor Schwenk: Das sensible Chaos. Stuttgart 1975, S. 172.
- 3 Paul Schatz: Die Umstülpung als Atem der Zeit, in: Mensch und Baukunst, Jg. V, Nr. 1 (1955), S. 12.
- 4 Klaus Ernhofer und Wolfgang Maas: Umstülpbare Modelle der platonischen Körper. Dornach 2000, S. 134 »Vom Sinn der platonischen Umstülpung«.
- 5 Sie auch: www.korpuskel.de



19



Bilder 20a – f
Twistix-Modelle: Verformung des Kuboktaeders – das Heureka-Oktaeder. Fotos: Caren Müller.