Dualität nicht-polyedrischer Körper

In Paaren von Polyedern, zum Beispiel zwischen Ikosaeder und Dodekaeder, zwischen Kubus und Oktaeder und im eigendualen Tetraeder, spielt sich Dualität ab. In diesem Beitrag wird das Gesetz der Dualität generalisiert und mit der Konstruktion alternierender Knoten verbunden.

Für Polyeder gilt, dass jede Fläche mindestens drei Eckpunkte hat und es mindestens vier Flächen gibt. Stets existiert ein duales Polyeder. Aus den beiden kann ein alternierender Knoten (oder ein Link) konstruiert werden, der so viele Kreuzungen hat, wie das Polyeder Kanten besitzt. Dies ist ein klassisches Resultat der Knotentheorie. Es wird mit den Begriffen Graph, medialer Graph, sowie reziproker Graph in zweidimensionaler Weise dargestellt.

Es zeigt sich, dass dieses Resultat auch für Körper gilt, deren Flächen weniger als drei Eckpunkte haben und die aus weniger als vier Flächen bestehen. Die resultierenden Körperformen lassen sich nicht wie Polyeder aus ebenen Flächen zusammensetzen. Im Folgenden werden sie als „Polyliner“ bezeichnet.

Wenn jede Facette mindestens zwei Ecken hat, kann wie zuvor ein alternierender Knoten konstruiert werden. Sind im Polyliner Flächen mit nur einem Eckpunkt vorhanden, ergibt die Konstruktion des zugehörigen Knotens an dieser Stelle eine Schlaufe, die sich lösen lässt (unknot). Wenn die Entwirrung nicht vorgenommen, sondern der Kreuzungspunkt beibehalten wird, entstehen räumliche Linienformen, die sich gemäß ihrer Topologie katalogisieren lassen.

Es werden Polyliner-Paare, und ihre Knoten beschrieben und Formen in Reihen gruppiert, die sich aus den folgenden Forderungen ergeben: a) neben Polygonen enthält der Polyliner Zweiecke, aber keine Einecke, und besitzt zwei bis sechs Kanten. b) neben Polygonen enthält der Polyliner Zweiecke und Einecke, und besitzt eine bis vier Kanten.

Zur Einleitung: Dualität als Grundlage des Denkens

Ausgangspunkt der Untersuchung ist das Phänomen der Dualität von Körpern im Raum. Auch unser Denken fußt in der Unterscheidung von Gegensätzen und ist stets in der Lage, zu einer Erscheinung ihr Komplement zu erfassen. Dabei können drei Arten von Komplementarität unterschieden werden: Polarität, Dualität und Gegenüberliegendes in Kreisläufen.

Typische Beispiele für Polarität sind: oben–unten, groß–klein, hell–dunkel, warm–kalt, schnell–langsam. All diese Begriffspaare spannen eine kontinuierliche Skala auf, die, einem Strahl gleich, ein offenes und ein geschlossenes Ende verbindet. Die geschlossenen Enden dieser Beispiele sind: der Erdmittelpunkt, das Verschwundene, Finsternis, Stillstand, die offenen Enden liegen in der unendlichen Weite des Raumes und unbegrenzten Möglichkeiten zu Expansion und Erwärmung.

Beispiele für Dualität sind: plus/minus und linksläufig/rechtsläufig. Im Gefüge der Dualitäten stehen gleichberechtigte Extreme einander gegenüber. Zwischen diesen, in der Mitte, gibt es einen Umschlagpunkt, in dem etwas Neues entsteht oder andere Regeln gelten. So steht zwischen plus und minus die Null, durch die man nicht teilen kann, und der Spiegel verkehrt Linksläufiges in Rechtsläufiges.

Selten kommen komplementäre Strukturen vor, in denen zwischen gleichberechtigt Gegenüberstehenden ein Umschlagpunkt fehlt. Meist handelt es sich dann um einen Kreislauf, der zwischen den Extrema einen Übergang auf zwei Wegen ermöglicht, wie zwischen Sommer und Winter.

Die Wechselseitigkeit zweier korrespondierender Polyeder folgt dem Muster der Dualität. In der Mitte zwischen zwei reinen Ausprägungen steht eine mittlere Form, die einen Durchgang zu weiteren Formen und Phänomenen bietet.

Dualität als Phänomen räumlicher Körper

Auf dem Kreisrand lassen sich alle Anzahlen von Punkten gleichmäßig verteilen, es gibt gleichmäßige Vielecke mit jeglicher Eckenanzahl. Werden Punkte auf die Kugeloberfläche gelegt, wird eine gleichmäßige Verteilung nur dann gelingen, wenn ihre Anzahl 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, oder 20 ist. Die Platonischen Körper sind Ausdruck der regelmäßigen Verteilungen von 4, 6, 8, 12 und 20. Sie treten paarweise auf. Je zwei gehören zusammen und komplementieren einander, auch in den Zahlen: Das Ikosaeder hat 12 Ecken und 20 Flächen, und sein Dualpartner, das Dodekaeder, 12 Flächen und 20 Ecken. Nicht nur diese regelmäßigen Polyeder haben einen Dualpartner: Auch zu jedem unregelmäßigen Polyeder gehört ein zweiter dazu. Dabei sind einige dual zu sich selbst, wie zum Beispiel das Tetraeder mit 4 Ecken und 4 Flächen.

Die Wechselseitigkeit der Dualität kann als ein plastischer Vorgang gesehen werden. Wenn sich von einer deformierbaren, zunächst kugelförmigen Oberfläche ausgehend, zum Beispiel sechs Ebenen von oben, unten, rechts, links, vorn und hinten in gleicher Weise dem Kugelzentrum entgegen schieben, formt sich der Kubus mit seinen sechs Flächen und acht Ecken. Sein Dualpartner entsteht, wenn entlang der selben Bewegungsbahnen Punkte vom Zentrum der Kugel her nach außen schieben und so die Oberfläche zum Oktaeder verformen, das zwischen sechs Ecken acht Flächen aufspannt.

Zwischen Kubus und Oktaeder sind also die Rollen von Fläche und Ecke vertauscht. In anderen Formen gilt es jeweils entsprechend. Der Wechsel erfolgt in spezifischer Art: die Dreiecke des Oktaeders sind im Kubus repräsentiert als dreizählige Ecken, und die Vierecksflächen des Kubus in den vierzähligen Ecken des Oktaeders, in denen vier Flächen zusammentreffen. Die Anzahl der Kanten ist in beiden die Gleiche.

Dass jedes Polyeder genau einen Dualpartner hat, gilt nur dann, wenn die Betrachtung sich allein auf die topologische Situation bezieht, auf die relative Lage der Elemente zueinander, nicht auf ihre bestimmten Maßverhältnisse. Im Folgenden wird von Interesse sein, wie viele Fünfecke, Vierecke, Dreiecke, usw. ein Körper enthält, und in welcher nachbarschaftlichen Beziehung sie zueinander stehen.

Aus der Verteilung von fünf Punkten lassen sich damit zwei und nur zwei Fünfflächner unterscheiden. Der eine, das sogenannte „trigonale Prisma“ (siehe Bild 5: „Vom Polyederpaar zum Knoten“) besteht aus zwei Dreiecken und drei Vierecken, welche die beiden Dreiecke ringsum verbinden, und die „tetragonale Pyramide“ besteht aus einem Viereck und vier Dreiecken, die das Viereck mit einer ihm gegenüberliegenden Spitze verbinden. Weitere Möglichkeiten, Volumen zwischen fünf ebenen Flächen einzuschließen, gibt es nicht.

Das Dreiecksprisma hat sechs Ecken – allesamt dreizählige Ecken; demzufolge besteht sein Dualpartner aus sechs Dreiecken, die zweimal zu dritt und dreimal zu viert zusammenkommen und so die „trigonale Doppelpyramide“ bilden. Die tetragonale Pyramide hat fünf Ecken: eine vierzählige und vier dreizählige. Ihr Dualpartner ist wiederum die tetragonale Pyramide, die, verglichen zur Ausgangsfigur, kopfüber steht.

Eigenduale Polyeder sind unter anderem alle Pyramiden. Zu ihnen gehört auch das Tetraeder, der einzig mögliche Vierflächner. Es sind aber nicht nur Pyramiden eigendual, sondern Eigendualität trifft man, in der Reihe der Polyeder wachsender Komplexität, in unregelmäßiger Folge immer wieder an.

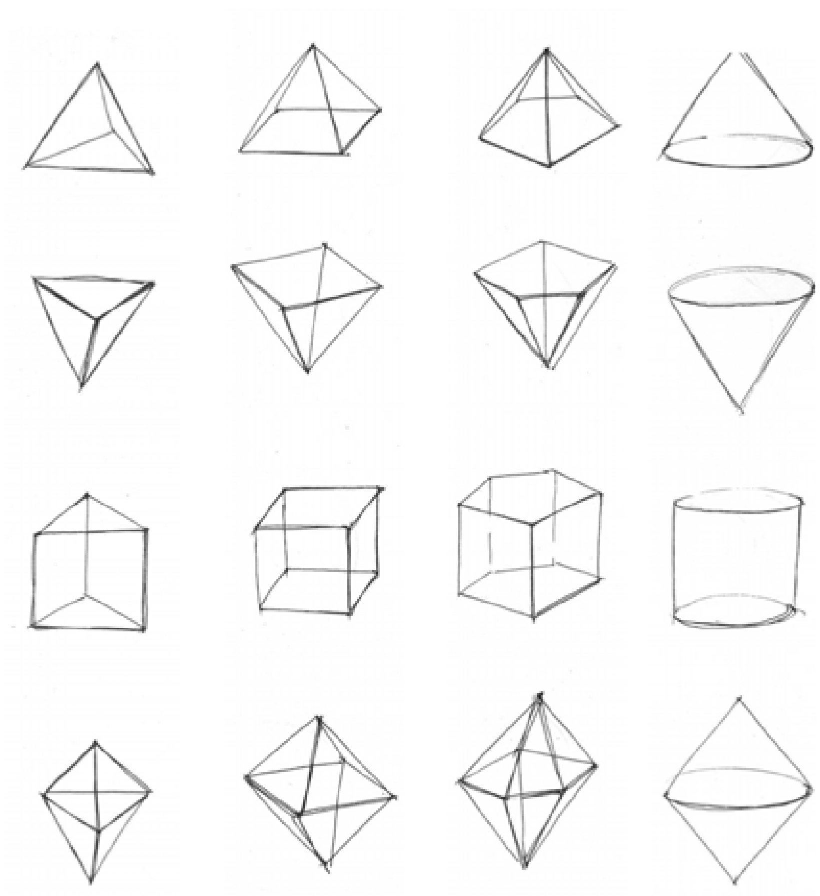


Bild 1: Endlose Reihen.
Von oben nach unten: Pyramiden; Pyramiden; Prismen; Doppelpyramiden.
Von links nach rechts: mit linienförmiger, trigonaler, tetragonaler, pentagonaler und kreisförmiger Grundfläche.

Polyeder in Reihen und Gruppen

Die Reihe der Pyramiden ist nach unten hin durch das Tetraeder abgeschlossen und nach oben hin offen. Dabei nähern sich Pyramiden mit n-eckigem Grundriss der Kegelform an. Alle Doppelpyramiden sind Dualpartner von Prismen; und auch die Reihen der Prismen und die der Doppelpyramiden beginnen mit der Dreizähligkeit und nähern sich den auf der Kreisform beruhenden Formen von Doppelkegel und Zylinder (siehe Bild 1: „Endlose Reihen“). Das sind drei Beispiele für Reihen von Körpern, die nach unten geschlossen und nach oben offen sind, so dass sich ihre Mitglieder nicht zählen lassen.

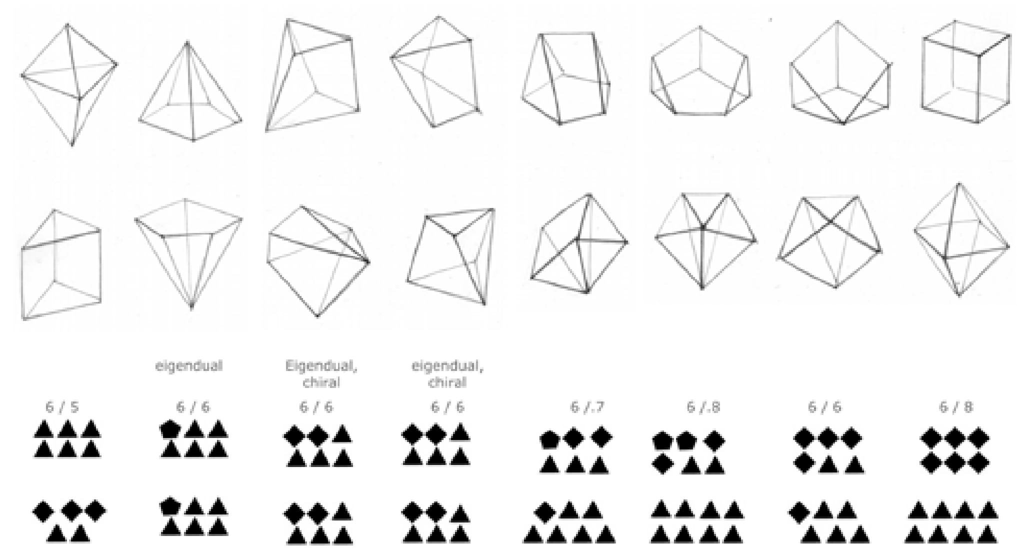


Bild 2: Sechsflächner. Von der trigonalen Doppelpyramide zum Kubus.
Von oben nach unten; Sechsflächner; Polyeder mit sechs Ecken; Anzahl der Flächen / Ecken;
Flächenformen des Sechsflächners; Flächenformen des Polyeders mit sechs Ecken.

Um Gruppen von benennbarer Stärke zusammenzufassen, kann die Anzahl der Flächen oder der Ecken als Kriterium gewählt werden. Die Gruppe der Vierflächner enthält das Tetraeder, und die der Fünfflächner das Dreiecksprisma und die tetragonale Pyramide.

Ab der Gruppe der Sechsflächner zeigt sich, dass Entscheidungen getroffen werden müssen, um die Gruppenstärke zu benennen. Denn unter den Sechsflächnern ist ein weiteres Phänomen anzutreffen, das sich, in loser Folge, bei Polyedern höherer Flächenzahl wiederfindet: Chiralität – Händigkeit. In der Ansicht, dass spiegelgleiche Polyeder so gut wie identisch sind, zählt man die beiden chiralen Sechsflächner in Bild 2: „Sechsflächner“ als ein und denselben und kommt auf 7 Hexaeder.

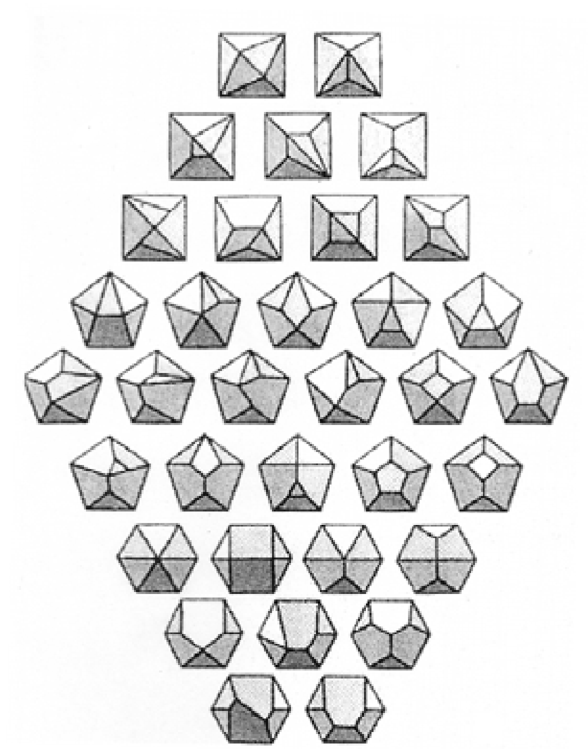


Bild 3: Siebenflächner.
Graphische Darstellung der 34 Heptaeder. Nach Koji Miyazaki

Synthese

Zwischen den zwei Extremen einer dualen Komplementarität steht ein mittlerer Umschlagpunkt. Dies ist im raumgeometrischen Dualpaar ebenfalls gegeben. Zwischen den Polyedern des Dualpaares spannt sich das Spektrum kontinuierlicher Verwandlung auf, und darin gibt es den einen eindeutig besonderen Moment. Kontinuierlich kann der eine Dualpartner in den anderen verwandelt werden, wenn dem Körper die Ecken abgestumpft werden, so lange, bis seine Flächen zusammengeschrumpft sind auf einen Punkt – den Eckpunkt des Dualpartners (siehe Bild 4: „Entstehung der Kernform“).

Um die Synthese von beiden Körpern zugleich ausgehend zu bilden, schiebt man die beiden Körper ineinander. Man stelle zum Beispiel ein kleines Oktaeder in einen großen Kubus. Die Oktaederspitzen weisen zu den Flächenmittelpunkten des Kubus. Nun lasse man das Oktaeder wachsen, und betrachte dabei die Schnittmenge des Volumens, also den Raum, den beide als ihren Innenraum beanspruchen. Diese Schnittmenge verwandelt sich

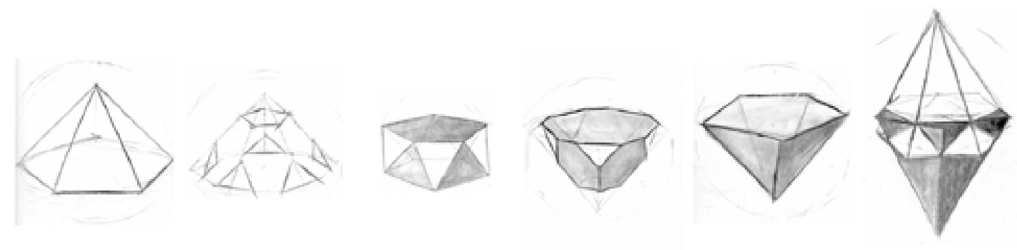


Bild 4: Entstehung der Kernform.
Von links nach rechts: Pentagonale Pyramide; Pyramidenstumpf; pentagonales Antiprisma (die mittlere Kernform); Pyramidenstumpf; pentagonale Pyramide; Durchdringung zweier pentagonaler Pyramiden.

kontinuierlich von der Oktaeder- zur Kubusform. In einem besonderen Moment berühren sich die Kanten der beiden Ausgangskörper paarweise. In diesem Moment der ausgewogenen Mitte entsteht eine Form, die einfacher ist, die weniger Flächen hat als alle anderen Zwischenformen, und „Kernform“ der beiden Dualpartner genannt wird (siehe Bild 4: „Entstehung der Kernform“).

Eine Eigenschaft von Kernformen interessiert uns im Folgenden besonders: alle Ecken des Kernes sind vierzählig. Das erlaubt es, die Eckpunkte als Kreuzungspunkte von zwei Strängen anzusehen, die jeder einen in sich geschlossenen Ring bilden. Wird das Gewebe aus Strängen abwechselnd über den Kreuzungspunkt hinweg und unter dem Kreuzungspunkt hindurch geführt, bildet sich ein der Kernform entsprechender Knoten: ein Knoten im topologischen Sinne, das heißt, ein fest gefügtes Gewebe, das sich nicht auflösen lässt, ohne den Strang zu durchbrechen.

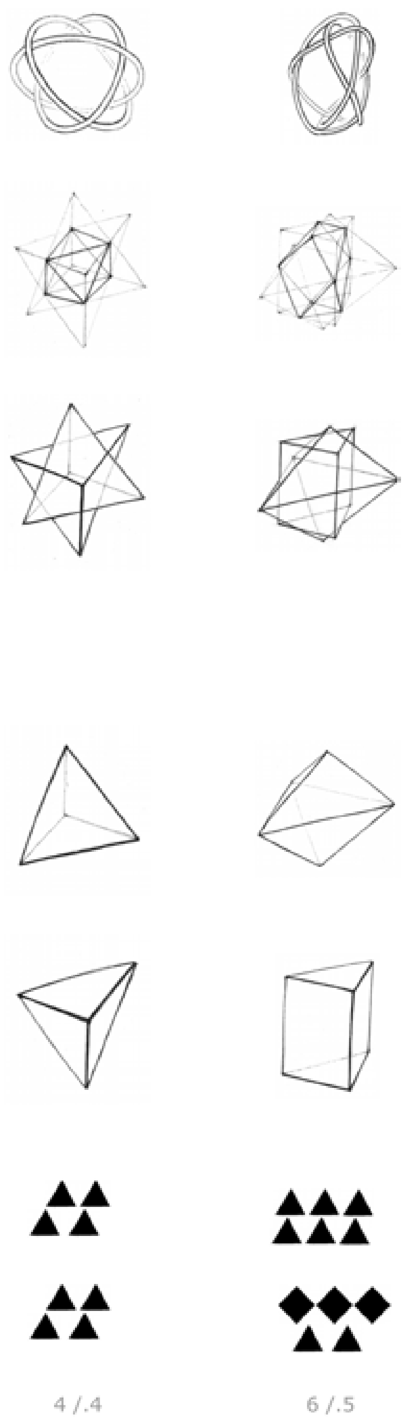


Bild 5: vom Polyederpaar zum Knoten.
Die Übersetzung von Dualpaaren in alternierende Knoten.

Von unten nach oben:
Anzahl der Flächen / Ecken;
Flächenformen des Polyeders A;
Flächenformen des dualen Polyeders B;
Polyeder A (links das Tetraeder, rechts das trigonale Prisma);
Polyeder B (links das Tetraeder, rechts die Trigonale Doppel-pyramide);
Durchdringung A und B;
Durchdringung und Kern;
korrespondierender Knoten / Link (links die Borromäischen Ringe).

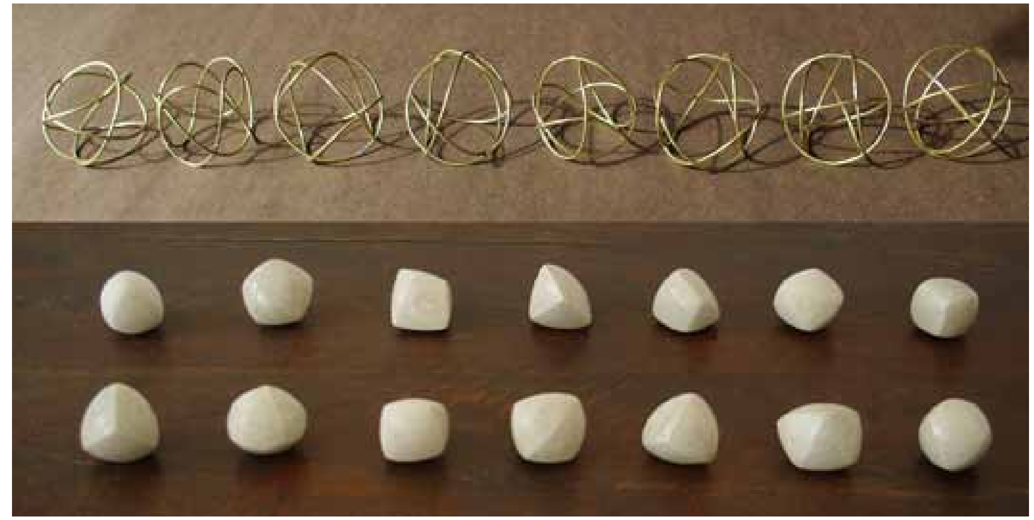


Bild 6: Sechsflächner und ihre Knoten.
Von links nach rechts in der gleichen Reihenfolge wie in Bild 2: „Sechsflächner“;
Modelle aus Messing mit beiden Varianten des Chiralen, ca. 12 cm Durchmesser;
Modelle aus Ton mit einer Variante des Chiralen, ca.10 cm Durchmesser.

Einfachste Knoten

Das einfachste Polyederpaar –das Tetraeder und sein Dual, das ebenfalls ein Tetraeder ist– korrespondiert so mit den „Borromäischen Ringen“, einem Link aus drei Strängen. (In der deutschen Fachsprache war für die aus mehreren Strängen zusammengesetzten Knoten lange Zeit der Terminus „Verschlingung“ gebräuchlich. Es hat sich aber in den letzen Jahren die englische Bezeichnung „Link“ durchgesetzt.) Die Borromäischen Ringe bilden miteinander 6 Kreuzungspunkte, entsprechend der 6 Kanten der Tetraeder (siehe Bild 5: „Vom Polyederpaar zum Knoten“). Das ist aber nicht der einfachste alternierende Knoten. Ein Blick in die Tabellen zeigt: Es gibt sowohl ein Link als auch einen Knoten mit 5 Kreuzungspunkten, ebenso ein Link und einen Knoten mit vieren („Figur Eight Knot“), des weiteren einen Knoten mit drei („Trefoil Knot“) und ein Link mit nur zwei Kreuzungspunkten („Hopf-Link“) (siehe Bild 7: „Einfache Knoten“).

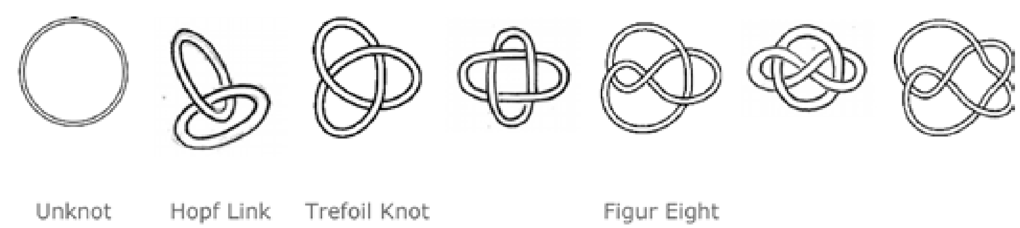
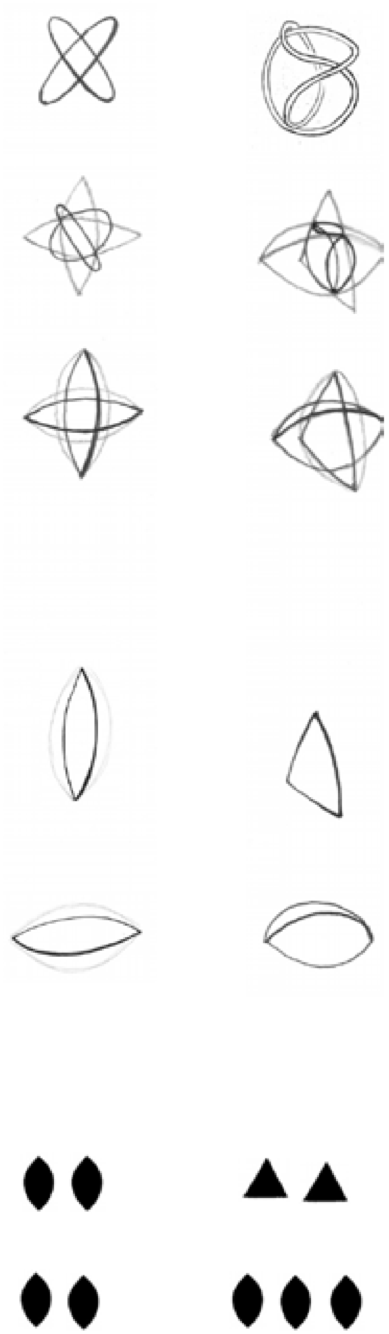


Bild 7: Einfache Knoten. Knoten und Links mit 0 bis 5 Kreuzungspunkten.



2 / 2 3 / 2

Bild 8: Polyliner mit Duogon.

Von unten nach oben:
Anzahl der Flächen / Ecken;
Flächenformen des Polyliners A;
Flächenformen des Dualpartners B;
Körper A (links: „Schote“, rechts: „Buchecker“);
der ihm duale Körper B (links: „Schote“,
rechts „Dreieckskissen“);
Durchdringung A und B;
Durchdringung und Kernform;
korrespondierender Knoten (links das Hopf-Link,
rechts der Trefoil-Knot)

Polyliner mit Duogon

Die Unvollständigkeit der Reihe von alternierenden Knoten und Links, wie sie sich aus der Synthese von Polyederpaaren ergibt, legt ein Fortführen der Übersetzungsmethode in eine Klasse von Formen nahe, in welcher Körper aus weniger denn vier Flächen gebildet werden. Die Betrachtung des Phänomens der Dualität, wie es sich an Polyedern zeigt, kann auf einfachere, das heißt auf Fälle mit niedrigeren Anzahlen von Flächen ausgedehnt werden, auf Körper mit krummen Kanten und gewölbten Flächen.

Es wird ein Raumeinschluss zwischen drei Facetten möglich, wo diese nicht als Abschnitte von Ebenen, sondern von Kugeloberflächen aufgefasst werden. Die entsprechende Form spannt drei mandelförmige „Duogone“ – „Zweier-Flächen“ – zwischen zwei dreizähligen Ecken auf und ähnelt einer Buchecker (siehe Bild 8: „Polyliner mit Duogon“). Ihr Dualpartner, eine Art dreieckiges Kissen, spannt zwei Trigone zwischen drei zweizähligen Ecken auf.

Aus Kugelfacetten kann dieser zweiflächige Körper nicht aufgebaut werden; die Flächen benötigen eine Variation der Wölbung mit kontinuierlichem Übergang, um Kanten nur an den gewünschten Stellen zu bilden.

Es scheint, dass hier das Spektrum der Komplexität wie über einen Umschlagpunkt kippt. Wenn die Vielfältigkeit der Facettierungen, die im Reich der Polyeder ins Unendliche fortgesetzt werden könnte, stark reduziert wird, tut sich eine andere Schicht von Vielfalt auf, nämlich die der Krümmungsvariation.

In der Fläche zeigt sich die gleiche schrittweise Auffächerung von Komplexität bei extremer Reduktion der Eckenzahl: vom Trigon aus Geradenabschnitten über das Duogon aus Kreissegmenten zum Monogon, dessen eine Kante eine Vielfalt von Krümmung in sich vereinigen muss, um nur eine Ecke auszubilden (siehe Bild 11: „Polygone“).

So wird es im Reich der nicht-polyedrischen Vielflächner hinfällig, die Gesamtform als aus einzelnen Abschnitten von etwas Größerem aufgebaut zu denken. Vielmehr bewährt sich eine Anschauung, nach der die postulierten Kanten eine verformungsfähige Haut als Ganzes zurecht ziehen.

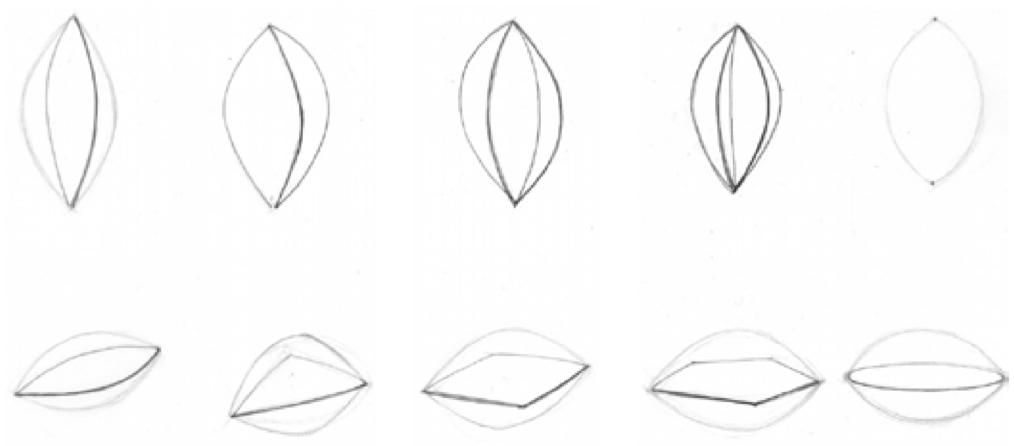


Bild 9: Reihen von Polylinern.
Oben: Polyliner aus Duogonen; unten: Polyliner mit zweizähligen Ecken.
Von links nach rechts: mit duogonalem, trigonalem, tetragonalem, pentagonalem und kreisförmigem Querschnitt.

Aus Gruppen werden Reihen

Wie die Buchecker zwischen zwei Ecken drei gewölbte Facetten entfaltet, so kann zwischen zwei Ecken jedwede Anzahl von Flächen gesetzt sein, und entsprechend können aus zwei Flächen zusammengesetzte „Vieleckskissen“ jedwede Eckenzahl haben (siehe Bild 9: „Reihen von Polylinern“). Mit der Einführung des Duogon werden Gruppen von Körpern einer Flächenzahl in ihrem Umfang grenzenlos. Sollen Gruppen mit benennbarer Anzahl von Mitgliedern gebildet werden, muss die Anzahl der Kanten maßgebend sein. In folgenden Listen sind die Formen nach der Anzahl ihrer Kanten sortiert, und die Körperformen sollen, einer Bezeichnung bislang ermangelnd, „Polyliner“ / „Vielkanter“ genannt werden, in Einklang mit der Tradition, dass im Polygon, dem Vieleck, Ecken abgezählt werden und im Polyeder, dem Vielflächner, Flächen, werden dementsprechend im Polyliner, dem Vielkanter, Kanten gezählt.

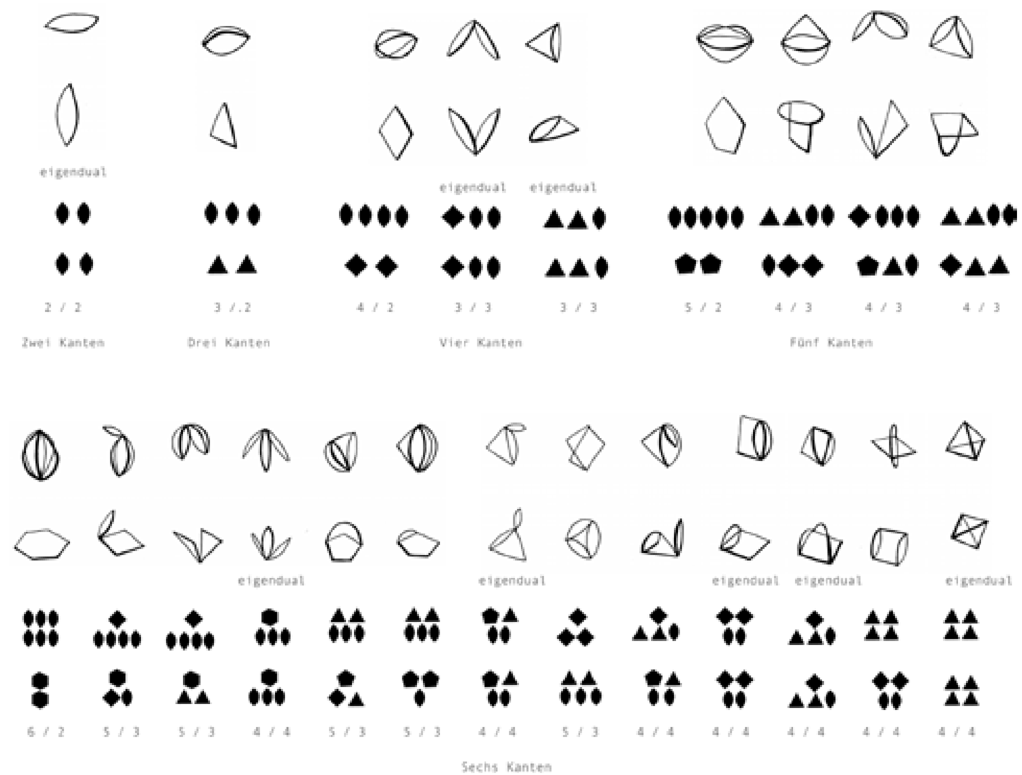


Bild 10: Polyliner mit Duogon, ohne Monogon.
Vollständige Gruppen der Zwei- bis Sechskanter – von der Schote zum Tetraeder.
Von oben nach unten: KörperA; Körper B; Polygone des Körpers A: Polygone des Körpers B;
Anzahl der Flächen / Ecken; Anzahl der Kanten.

Auch die einfachsten Knotenfiguren besitzen ein Dualpaar von Körperformen.

Bild 11: Polygone.
Flächenformen mit einer, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben und acht Ecken

Polyliner mit Monogon

Die neu gewonnene Möglichkeit, gewölbte Flächen und gekrümmte Kanten als strukturierende Elemente zuzulassen, legt es nahe, auch „Monogone“ in die Betrachtung aufzunehmen, also Flächen, die von nur einer Kante berandet sind. Diese kommt in einer einzigen Ecke auf sich selbst zurück (siehe Bild 11: „Polygone“). Einer solchen tropfenförmigen Fläche dual ist die einzählige Ecke. Sie ist der letzte Punkt einer solitär endenden Kante.

Der zunächst einfachste Körper mit Monogon besteht aus zwei monogonalen Flächen, welche Wölbung haben müssen, damit Volumen entstehen kann (Siehe Bild 12: „Einkanter“). Der Körper hat eine einzige Kante, eine zweizählige Ecke und zwei monogonale Flächen. Der diesem Körper Duale muss demzufolge zwei Ecken und nur eine Fläche besitzen; die Fläche hat duogonal und die beiden Ecken einzählig zu sein. Dabei handelt es sich zwar auch um einen von einer einzigen Kante strukturierten Körper. Die Endpunkte dieser einen Kante treffen nicht zusammen, sondern bleiben solitär. Und in dieser einen Kante kommen die beiden Kanten des Duogons aufeinander, das eng zusammengerollt liegt.

Schlaufen

Die den einzähligen Ecken und Monogonen entsprechende Situation im Knoten, in der ein Strang nur locker übereinander verdrillt liegt, wird als „Schlaufe“ bezeichnet. Für diese vermeintliche Kreuzung, die sich leicht auflösen lässt (Reidemeister Bewegung 1), wird in der Knotenkunde der Name „Auge“ verwendet, der aber nicht zutreffend scheint, da die Ausformung des Auges abweicht vom Monogon.

1 / 2

Bild 12: Einkanter. Polyliner mit einer Kante.
Von unten nach oben: Anzahl der Flächen / Ecken; Flächenformen des Polyliners A; Flächenformen des Dualpartners B; Körper A; Körper B; Durchdringung A und B; Durchdringung und Kern; korrespondierende Schlaufe / Knoten / Link.

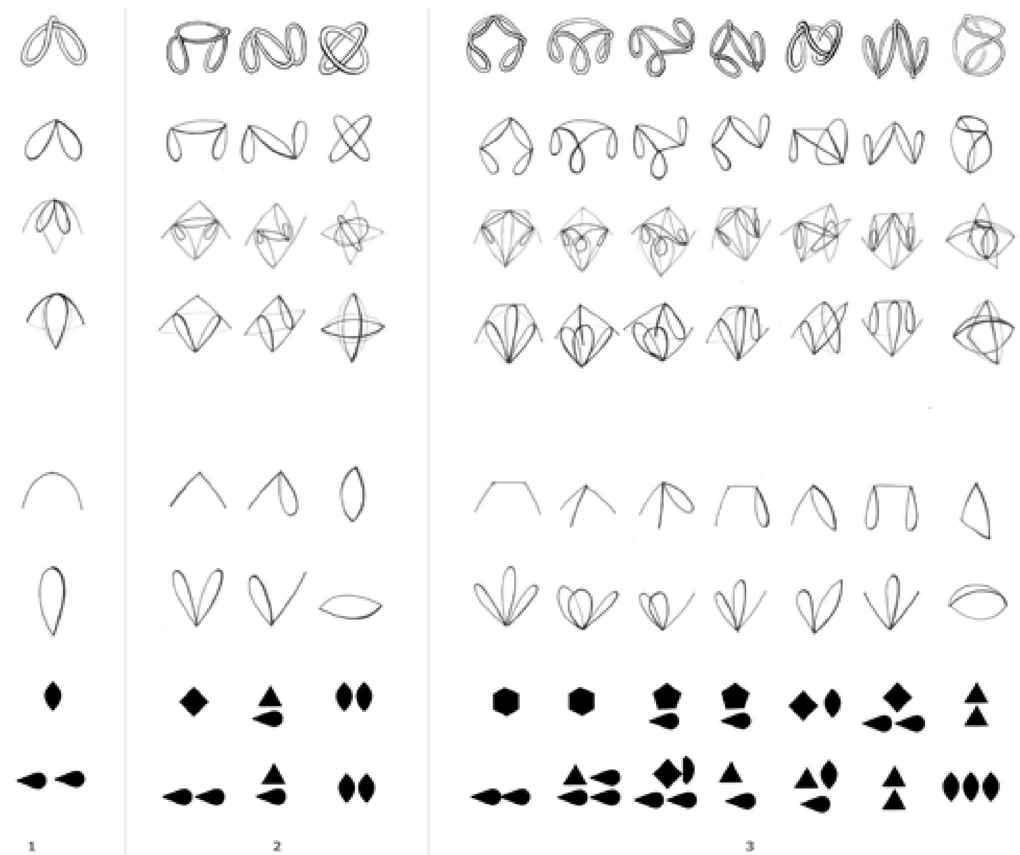


Bild 13: Ein- bis Dreikanter.
Polyliner mit Monogon und Duogon – Dualpaare und ihre Übersetzung in Raumlinien.
Von unten nach oben: Kantenanzahl; Flächenformen des Polyliners A, Flächenformen seins Dualpartners B; Polyliner A; dualer Polyliner B; Durchdringung A und B; Durchdringung und Kernform;
Schlaufe – von der Lemniskate bis zum Trefoil-Knot.

Im oben beschriebenen Fall ist überhaupt nur eine einzige solche Schlaufe vorhanden, und in der Lehre der relativen Lagebeziehungen würde das ganze Gebilde zunächst als einfacher, unverknoteter Ring zählen. Wenn die Schlaufen aber nicht als auflösbar betrachtet werden sondern als Kreuzungspunkt des Stranges bestehen bleiben, lassen sich aufgrund der Zuordnung zu den Dualpaaren stringent Gruppen mit benennbarer Anzahl von Raumkurven aufstellen (siehe Bild 13: „Ein- bis Dreikanter“)

Es gibt zwei und nur zwei Möglichkeiten, eine einzige Kante auf dem Oberflächenkontinuum zu platzieren: Erstens, indem sie auf sich selbst zurückkommt und zweitens, indem sie in zwei Punkten endet. Die beiden Wege bilden das eben besprochene Dualpaar. Es gibt genau vier Möglichkeiten, zwei Kanten zu verteilen: Erstens die als „Schote“ beschreibbare Form aus zwei Duogonen, welche eigendual ist (siehe Bild 10: „Polyliner mit Duogon“), zweitens eine weitere eigenduale, die aus einem Trigon und einem Monogon besteht, wobei das Trigon so zusammengerollt liegt, dass zwei seiner Kanten in einer zusammentreffen, drittens eine Verteilung, die zwei Monogone und ein Duogon beinhaltet, wobei das Duogon zwischen den Monogonen so aufgerollt liegt, dass seine beiden Ecken in der einzigen Ecke dieser Figur zusammenkommen. Es handelt sich um die Kernform des Dualpaares Einkanter. Und schließlich viertens der Dualpartner dieser Form. Er besteht aus einer einzigen Fläche, einem Quadrigon. Je zwei von dessen Kanten liegen aufeinander.

Weiterhin sind 14 Dreikanter in sieben Dualpaaren und 40 Vierkanter in 22 Dualpaaren topologisch unterscheidbar. In dieser numerischen Aufstellung sind die chiralen Varianten nicht berücksichtigt (siehe Bild 13 und 14: „Ein- bis Dreikanter“ und „Vierkanter“). Entsprechendes lässt sich für n-Kanter fortsetzen. Für das Anwachsen der Gruppenstärke ist bislang keine Regel bekannt.

Gert Bär schreibt in seinem Beitrag „Zufall und Absicht in der Kurve – ein Werkzeug der Gestaltung“ in diesem Buch, dass eine Kurve als Pfad eines Punktes, als Protokoll eines Bewegungsablaufes gelesen wird. Wenn die Kurve unmittelbar einen Bewegungsaspekt mitbringt, geht mit der Übersetzung von Körperformen in eine Knotenlinie eine Verbindung von zwei statischen Körpern und einem Bewegungspfad einher.

Körper mit weiter reduzierter Flächenzahl

Im Dualpaar der Einkanter sind die Flächen- und Eckenzahl auf 1 / 2 bzw. 2 / 1 reduziert. Weiter verringern lassen sich die Zahlen im Reich der Polyliner nicht.

Es ist nicht jeder Körper dualisierbar. Eine geschlossene Oberfläche und eine Verbindung aller vorhandenen Kanten untereinander sind notwendige Bedingungen. Doch auch Körper ohne Kante können dualisiert werden. Als ein Vertreter der Notation 1 / 1 kann die Eiform gelten, in der sich eine etwas abgerundete Ecke auf die gesamte Fläche abbildet. Das Ei ist demnach eigendual. Und weiter kann für die Notation 1 / 0 bzw. 0 / 1 das Paar Kugel (eine Fläche, keine Ecke) und Punkt (keine Fläche, eine Ecke) angegeben werden. Damit ist das Prinzip der Wechselseitigkeit zwischen Ecken und Flächen auf seine Basis zurückgeführt. Und die Kugel, die am untersten Ende der Skala steht, findet sich auch an ihrem obersten Ende ein, nämlich als unendlich fein facettiertes Polyeder.

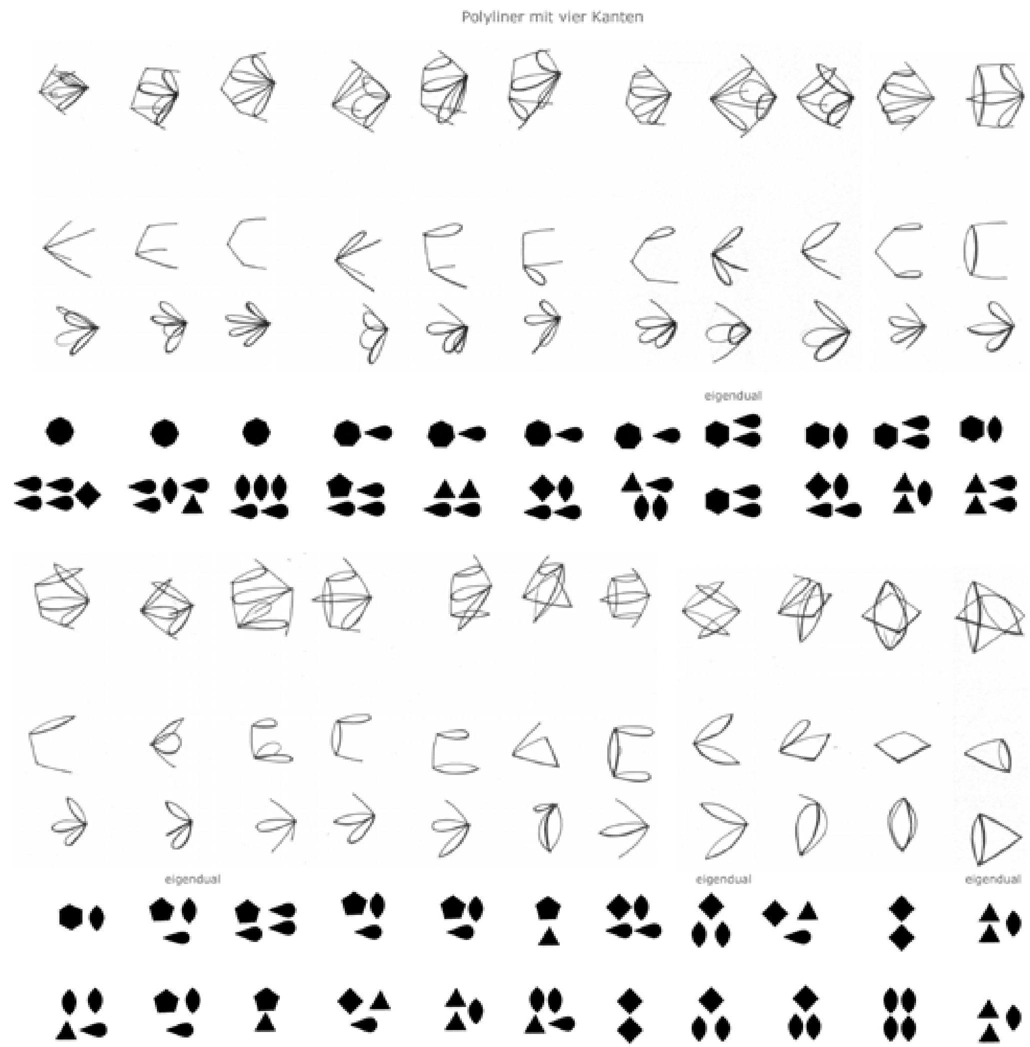


Bild 14: Vierkanter. Polyliner mit vier Kanten.
Von unten nach oben: Flächenformen des Polyliners A; Flächenformen des dualen Polyliners B; Polyliner A, Polyliner B; Durchdringung der Körper A und B.